

(4116 1:30-2:30)

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall \delta, \chi \quad \langle u, v \rangle \stackrel{\text{ce}}{=} \langle \cdot, \cdot \rangle (u, v) \quad \forall (u, v) \in V \times V$$

$$\forall u, v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$1) \langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

$$2) \langle \lambda u, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle$$

$$3)$$

$$4)$$

$$5) \langle 0, u \rangle = 0 = \langle u, 0 \rangle$$

Απόδειξη

απόδειξη

$$\begin{aligned} \langle 0, u \rangle &= \langle w - w, u \rangle \stackrel{(1)}{=} \langle w, u \rangle + \langle -w, u \rangle = \langle w, u \rangle + \langle (-1)w, u \rangle \stackrel{(2)}{=} \\ &= \langle w, u \rangle + (-1) \langle w, u \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$6) \langle \lambda u, \mu w \rangle = \lambda \mu \langle u, w \rangle$$

Απόδειξη

$$\langle \lambda u, \mu w \rangle \stackrel{(2)}{=} \lambda \langle u, \mu w \rangle \stackrel{(3)}{=} \lambda \langle \mu w, u \rangle \stackrel{(2)}{=} \lambda (\mu \langle w, u \rangle) \stackrel{(3)}{=} \lambda \mu \langle u, w \rangle$$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, u_1, u_2, w_1, w_2 \in V$$

$$\langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 \rangle \stackrel{(1)}{=} \langle \lambda_1 u_1, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 \rangle + \langle \lambda_2 u_2, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 \rangle$$

$$\stackrel{(3)}{=} \langle \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2, \lambda_1 u_1 \rangle + \langle \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2, \lambda_2 u_2 \rangle =$$

$$\stackrel{(2)}{=} (\langle \mu_1 w_1, d_1 u_1 \rangle + \langle \mu_2 w_2, d_1 u_2 \rangle) + \langle \mu_1 w_1$$

Γενικά αν $u, w_1, w_2, \dots, w_n \in V$

$$\lambda, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{Ισχύει } \langle \lambda u, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \dots + \mu_n w_n \rangle &= \lambda \mu_1 \langle u, w_1 \rangle + \lambda \mu_2 \langle u, w_2 \rangle + \dots + \lambda \mu_n \langle u, w_n \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda \mu_j \langle u, w_j \rangle \end{aligned}$$

Απόδειξη

Για $n=1$ και $n=2$ το είναι.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Θα το δείξουμε για $n+1$. Τότε επαγωγικά θα το έχουμε $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\langle \lambda u, \mu_1 w_1 + \dots + \mu_{n+1} w_{n+1} \rangle = \langle \lambda u, \mu_1 w_1 + \dots + \mu_n w_n + \mu_{n+1} w_{n+1} \rangle =$$

$$\begin{aligned} &= \langle \lambda u, \mu_1 w_1 + \dots + \mu_n w_n \rangle + \langle \lambda u, \mu_{n+1} w_{n+1} \rangle \stackrel{\text{από υποθέση για το } n}{=} \lambda \mu_1 \langle u, w_1 \rangle + \dots + \lambda \mu_n \langle u, w_n \rangle + \\ &\quad + \lambda \mu_{n+1} \langle u, w_{n+1} \rangle = \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} \lambda \mu_j \langle u, w_j \rangle \quad (\text{το δείχνουμε για } n+1)$$

Γενική περίπτωση

-2-

Έστω $u_1, u_2, \dots, u_m, w_1, w_2, \dots, w_m \in V$ $u_i, w_i \in \mathbb{N}$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$. Τότε :

$$\left\langle \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^m \mu_j w_j \right\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j \langle u_i, w_j \rangle$$

Απόδειξη

Την ιδέα για $n=2$

Την περίπτωση για $m=1$ και ζυγόν $u \in \mathbb{N}$

θα κάνω την επαγωγή για $n=m$

Απόδειξη

$u \in V \Rightarrow \|u\| \stackrel{\text{op}}{=} \sqrt{\langle u, u \rangle}$ μήκος του u

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ το κανονικό εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$

$$[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] = u \Rightarrow \|u\| = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $u, v \in V$ ονομάζονται κάθετοι αν $\langle u, v \rangle = 0$

Παράδειγμα

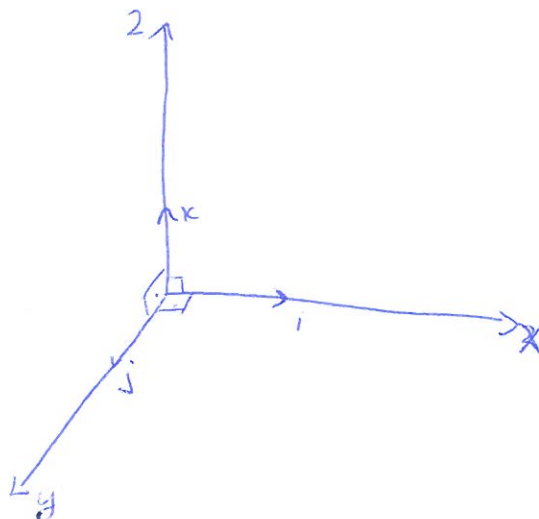
Το 0 είναι κάθετο

με κάθε διάνυσμα

$$i = (1, 0, 0)$$

$$j = (0, 1, 0)$$

$$k = (0, 0, 1)$$



$$\langle i, j \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$$

Ομοίως $\langle i, k \rangle = \dots = 0$

$$\langle j, k \rangle = \dots = 0$$

Πυθαγόρειο Θεώρημα

Έστω $u, v \in V$. Τότε u, v είναι κάθετα αν $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ (1)

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω ότι είναι κάθετα. Συντάσσει $\langle u, v \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 & \stackrel{\text{op}}{=} \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \\ & = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow 2\langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow \langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow u, v$ κάθετα ίσως τους.

Γενίκευση Πυθαγορείου Θεωρήματος

Έστω $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$. Αν τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι ανά 2 κάθετα.

Τότε ισχύει $\|u_1 + u_2 + \dots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \dots + \|u_n\|^2 \iff$

$$\iff \left\| \sum_{i=1}^n u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$$

Απόδειξη

Για $n=2$ είναι το Πυθαγόρειο Θεώρημα

Θα αποδείξω με επαγωγή

Υποθέτω ότι ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Θα το δείξω για $n+1$

Η υπόθεση είναι ότι όλα ~~είναι~~ τα $u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$ είναι κάθετα ανά δύο. $\Leftrightarrow$ Δείχνουμε ότι το u_{n+1} είναι κάθετο στο $\sum_{i=1}^n u_i$

$$\langle u_1 + u_2 + \dots + u_n, u_{n+1} \rangle = \langle u_1, u_{n+1} \rangle + \langle u_2, u_{n+1} \rangle + \dots + \langle u_n, u_{n+1} \rangle = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$$

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θώρημα για τα u_{n+1} και $u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

$$\text{Έτσι έχουμε } \|u_{n+1} + (u_1 + u_2 + \dots + u_n)\|^2 = \|u_{n+1}\|^2 + \|u_1 + u_2 + \dots + u_n\|^2 \quad \text{από το προηγούμενο βήμα}$$

$$= \|u_{n+1}\|^2 + \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \dots + \|u_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \|u_i\|^2 \quad \text{το έχουμε για } n+1$$

Άρα επαγωγικά το έχουμε $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{Είδαμε ότι } \|u+w\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 \Rightarrow u \perp w$$

Αυτός ο τύπος δεν ισχύει και για $n \geq 3$. Ανάδειξη

$$\|u_1 + u_2 + \dots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \dots + \|u_n\|^2 \quad \text{δεν είναι γενικά ότι είναι κάθετα ανά 2.}$$

Ασκηση

SOS

Να δώσω ένα παράδειγμα συγκεκριμένο για $n=3$ στο $\mathbb{R}^3$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο με την παραπάνω ιδιότητα.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα $W \subseteq V$ όπου V δ.χ. ονομάζεται διανυσματικός υπόχωρος του V αν είναι. , το ίδιο δ.χ. με τις ίδιες πράξεις του V και

συμβολίζω $W \subseteq V$

Ένα υποσύνολο $W \subseteq V$ είναι διαν. υπόχωρος του V αν είναι κλειστό ως προς τις πράξεις "+" και ".". Δηλαδή αν $u+v \in W$
 $\forall u, v \in W$, και $\lambda u \in W, \forall \lambda \in \mathbb{R}, u \in W$

Παράδειγμα

- Έστω $u \in \mathbb{R}^3$
- 1) Αν $u=0$ τότε το $\{0\}$ είναι διαν. υποχ. του $\mathbb{R}^3$
 - 2) Αν $u \neq 0$ τότε το $A = \{\lambda u, \lambda \in \mathbb{R}\}$ είναι διαν. υποχ. *
 - 3) Αν $u, v \in V$ και γραμμ. εξαρτ. ορίζουν τον ίδιο διαν. υποχ. $B = \{\lambda u, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\mu v, \mu \in \mathbb{R}\}$
 - 4) Αν είναι γραμμ. ανεξ. τότε ορίζουν έναν διαν. υποχώρο διειστάτης $\mathbb{R}^2$ του $\mathbb{R}^3$ του $\Gamma = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
 Τα u, v είναι βάζον του $\mathbb{R}^2$ ενήνεδα
- * είναι διειστάτης λ με βάζον ω εωθεία

Εύρεση κάθετου διανυστήρα

Έστω $u \in V$

Αν $u=0$ τότε το u είναι κάθετο με κάθε άλλο διάνυσμα

Αν $u \neq 0$ φάινουμε $u \perp u$

Τότε $\langle u \rangle$ υπάρχει

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει το $\omega = \lambda u$ τότε $\langle u, \omega \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle u, \lambda u \rangle = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \lambda \langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ Άρα είναι μόνο το μηδενικό διάνυσμα.

Έστω $\omega_0 \in V, \omega_0 \notin \langle u \rangle$ δηλαδή ω_0, u είναι γραμμ. ανεξ. Άρα ορίζουμε
 ένα χώρο $B = \langle u, \omega_0 \rangle$. Θέλω να έρω $x \in B$ πω $x \perp u$.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $x = \lambda_1 u + \lambda_2 v_0$ για κάποιους $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\text{Θέλουμε } x \perp u \Leftrightarrow \langle u, \lambda_1 u + \lambda_2 v_0 \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \langle u, u \rangle + \lambda_2 \langle u, v_0 \rangle = 0$$

$$\text{Ψάχνω για } \lambda_1, \lambda_2. \text{ Έστω } \lambda_1 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{\langle u, u \rangle}{\langle u, v_0 \rangle}$$

$$\text{Άρα } x = u - \frac{\langle u, u \rangle}{\langle u, v_0 \rangle} v_0 \text{ και } x \perp u$$

Άσκηση

Δίνονται τα διανύσματα $u = (1, 2, 3)$ και $w = (4, 5, 6)$ στο $\mathbb{R}^3$

Αν $B = \text{span}(\{u, w\})$ να βρεθεί διάνυσμα $x \perp u$ με $x \in B$

Ανισότητα Cauchy-Schwarz

Έστω V δ.χ $u, v \in V$. Τότε $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

Απόδειξη

Εάν $u=0$ ή $v=0$ είναι προφανώς ως ισότητα.

Έστω $u \neq 0$ και $v \neq 0$

Ορίσω ένα ~~επίσης~~ διάνυσμα $w := u - \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v$

Τότε $v \perp w$ λόγω της παραγόμενης διαδικασίας

$$u = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v + \left(u - \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v \right)$$

$$\langle u, u \rangle = 0$$

$$\langle \lambda u, u \rangle = \lambda \langle u, u \rangle = 0$$

Αρα από πολλαπλασιασμό έχουμε

$$\|u\|^2 = \left\| \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v \right\|^2 + \left\| u - \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v \right\|^2 \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{Αρα } \|u\|^2 \geq \left\| \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v \right\|^2 \Rightarrow \|u\| \geq \left\| \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v \right\| = \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|v\|^2} \|v\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|u\| \cdot \|v\| \geq |\langle u, v \rangle|$$

Πότε ισχύει η ισότητα?

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει: $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\| \Leftrightarrow$

$$|\langle u, v \rangle|^2 = \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \Rightarrow \|u\|^2 = \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|^2} \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2)} \Rightarrow u - \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v = 0 \Rightarrow u = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v$$

Αρα τα u, v είναι γραμμ. εξαρτημένα. οπότε για οποιοδήποτε λ κατά

$$\muών για $\lambda = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}$$$

Άσκησης

2) Δείξτε γενικευμένες των ανισώσεων Cauchy-Swartz τις εξής

ανισότητες α. Ανισότητα αριθμητικού-αλγεβρικού γινομένου

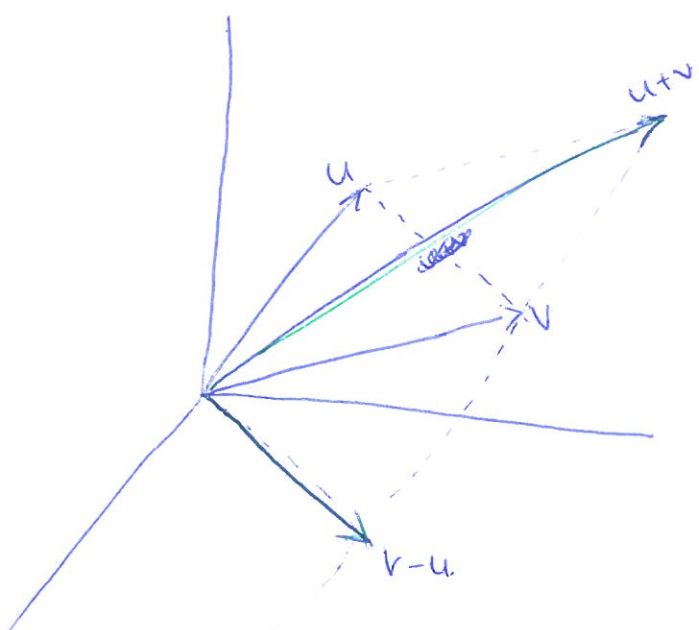
† $a_1, a_2, \dots, a_n$ θετικούς λογισμούς

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

$$\beta. \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j^2 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \quad \mu\epsilon \quad a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$$

Κοινός του Παράλληλογράμμου

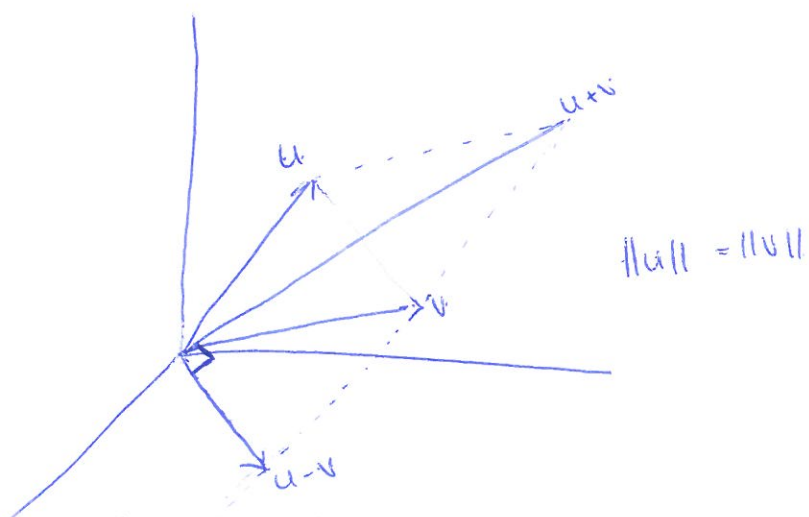
Έστω $u, v \in V$. Τότε ισχύει $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$



Απόδειξη

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 &= \langle u+v, u+v \rangle + \langle u-v, u-v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle + \\ &+ \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \end{aligned}$$

Αν $u, v \in V$ με $\|u\| = \|v\|$ τότε $u+v \perp u-v$ (Οι διαγώνιες ενός ραβδόσχημου τετραγώνου τέμνονται κάθετα)



Απόδειξη

$$\langle u+v, u-v \rangle = \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle - \langle v, v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$$

Από προηγούμενη ανισότητα γνωρίζαμε $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$
έχου το επίσης $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u-v\|$

Απόδειξη

$$\|u\| = \|u-v+v\| \leq \|u-v\| + \|v\| \Rightarrow \|u\| - \|v\| \leq \|u-v\|$$

$$\text{Συμμετρικά έχουμε } \|v\| - \|u\| \leq \|u-v\|$$

$$\text{Άρα έχουμε ότι } |\|u\| - \|v\|| \leq \|u-v\|$$